



## Explorando en la Óptica

ACADEMIA MEXICANA DE ÓPTICA, A.C.

# Óptica no lineal

[Norberto Arzate Plata](#)

[narzate@cio.mx](mailto:narzate@cio.mx)

*Centro de Investigaciones en Óptica, A.C., León, Guanajuato, México.*

Publicado: 4 de Marzo de 2014.

Sección: Artículos de divulgación, Explorando en la Óptica, Academia Mexicana de Óptica, A.C.

**Resumen:** La invención del láser, en 1960, marcó el inicio de una nueva era en el campo de la óptica. En particular, el área de la óptica no lineal tuvo un rápido desarrollo: la mayor parte de sus fundamentos se reportaron en la década de los sesentas. Nicolaas Bloembergen, galardonado con el premio Nobel de Física, en 1981, fue uno de los principales científicos que contribuyeron al desarrollo de la óptica y espectroscopía no lineal [1,2]. En el presente artículo se describen fenomenológicamente algunos de los principales efectos ópticos no lineales: generación de segundo armónico, suma y diferencia de frecuencia, generación de tercer armónico, etc. Se describen, además, algunos estudios que se han realizado en el Centro de Investigaciones en Óptica, A.C. dentro del campo de la óptica no lineal.

### Sistemas físicos no lineales

Cuando se habla de que un sistema físico responde de manera *no lineal* a cierto estímulo o perturbación se refiere a que la respuesta del sistema no es exactamente proporcional (lineal) a la perturbación que la produce. Si la perturbación es muy débil entonces la respuesta lineal del sistema será una muy buena aproximación; sin embargo, en el caso en que la perturbación empieza a ser apreciable entonces la respuesta no lineal dará una mejor explicación del fenómeno.

Un ejemplo de respuesta lineal se puede ver en el problema mecánico de un resorte [3], en donde la ley de Hooke dice que la fuerza de restauración de un resorte es proporcional a su desplazamiento de su posición de equilibrio. La solución lineal del sistema es tal que el desplazamiento del resorte de su posición de equilibrio es el correspondiente al del movimiento armónico simple que oscila a la frecuencia fundamental,  $\omega_0$ . Este

comportamiento tiene lugar solo cuando la amplitud de la oscilación es pequeña. Siendo que en la realidad, la respuesta de los sistemas físicos no es perfectamente lineal entonces la respuesta de oscilación del resorte contendrá términos oscilatorios a frecuencias que serán múltiplos enteros de la frecuencia fundamental, llamados armónicos [4]. En este caso, la fuerza de restauración del resorte tendrá, al menos, un término no lineal en el desplazamiento. En el caso en que la fuerza de restauración contiene terminos no lineales proporcionales a potencias pares del desplazamiento entonces la energía potencial del sistema será asimétrica con respecto a la posición de equilibrio del resorte. Mientras que si ésta contiene términos no lineales proporcionales a potencias impares del desplazamiento entonces la correspondiente energía potencial será simétrica con respecto a la posición de equilibrio.

### Inicios de la óptica no lineal

En el campo de la óptica, se tiene el interés de saber la respuesta de los átomos o moléculas que conforman a un medio a la incidencia de campos electromagnéticos. La cantidad física de interés es la polarización, la cual da la densidad de momentos eléctricos dipolares que se inducen en el medio debido a la presencia del campo electromagnético. Si el medio responde de manera lineal entonces la polarización del medio es linealmente proporcional al campo eléctrico. A la cantidad de proporcionalidad entre la polarización y el campo eléctrico se le denomina susceptibilidad eléctrica lineal, cuya parte real da el índice de refracción del medio y su parte imaginaria describe la absorción del sistema. En cambio, si la respuesta óptica es no lineal entonces la polarización contiene términos no lineales en el campo eléctrico. La potencia que se tenga en el campo eléctrico define el orden de la no linealidad. Por ejemplo, en los procesos no lineales de segundo orden, la polarización es proporcional al cuadrado del campo óptico; mientras que en los procesos no lineales de tercer orden, la polarización es proporcional al cubo del campo.

La primera observación de un fenómeno óptico no lineal tuvo lugar en el año de 1875, cuando John Kerr [5] demostró que el índice de refracción de algunos líquidos y sólidos amorfos cambia con la aplicación de un campo eléctrico DC intenso. A este fenómeno se le conoce como *efecto Kerr*. Un efecto análogo que se genera en cristales, es el efecto Pockels reportado, en 1894, por Friedrich Pockels. En este efecto ocurre un cambio de índice de refracción de medios cristalinos, que no presentan un centro de simetría, por la presencia de campos eléctricos DC intensos. En el efecto Kerr, el cambio de índice de refracción es proporcional al cuadrado del campo aplicado. Mientras que en el efecto Pockels, el cambio es directamente proporcional al campo.

La observación de los fenómenos no lineales es posible si los campos eléctricos que se utilizan para perturbar el medio son del orden de los campos que mantienen a los electrones ligados a los átomos o moléculas. La disponibilidad de campos intensos fue posible hasta 1960 con la invención del láser. Un año después, en 1961, Peter A. Franken y colaboradores [6] de la Universidad de Michigan reportaron la primera observación de un efecto no lineal en la era del láser. En su experimento, ellos enfocaron pulsos de luz de un láser de rubí, con duración en el orden de milisegundos, energía de 3 J y longitud de onda de 6943 Å, en un cristal de cuarzo. Franken y colaboradores detectaron luz a la mitad de la longitud de onda incidente, a 3472 Å, en una placa fotográfica. En otras palabras: ellos observaron la *generación de segundo armónico* (GSA) o luz al doble de la frecuencia de la luz incidente (ver Figura 1). La observación de GSA se ha considerado como el inicio del desarrollo de la óptica no lineal. La invención del láser fue el hecho que marcó la pauta y, desde entonces, una gran cantidad de estudios en diversos materiales y áreas, así como sus aplicaciones se han desarrollado.

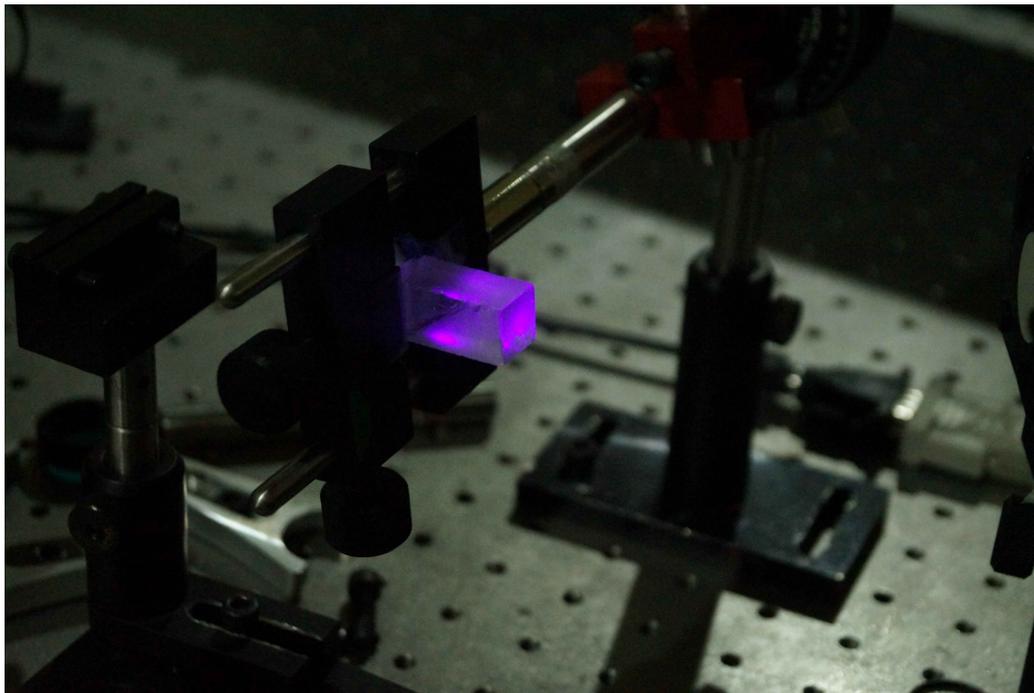


Figura 1: Generación de segundo armónico en un cristal KDP. La longitud de longitud de onda de de la luz incidente fue de 800 nm (en el infrarrojo) y la longitud de onda de la luz generada en segundo armónico fue de 400 nm (en el violeta). La foto fue proporcionada por Sergio A. Romero Servín, quien es estudiante del programa del Doctorado en Ciencias y trabaja en el grupo del Laboratorio de Óptica Ultrarrápida del CIO.

### Aspectos importantes para la generación de armónicos

Aunque la observación de Franken y colaboradores fue exitosa, la eficiencia de conversión de GSA fue muy pequeña, del orden de una parte en  $10^7$ , lo cual tecnológicamente era impráctico. No pasó mucho tiempo antes que, en 1962, P. D. Maker y colaboradores [7] de "Ford Motor Company" hicieron un estudio de los efectos de la dispersión del material y del enfocamiento del haz en la GSA utilizando el cristal no lineal KDP ("*potassium dihydrogen phosphate*"). Para que la GSA sea eficiente, se requiere que exista una interferencia constructiva entre los campos incidentes y generados. La condición que rige esta interferencia es la de empatamiento de las fases de los campos. En el caso de GSA, la condición de empatamiento de fase dice que la fase del campo fundamental,  $2k\omega$ , debe ser igual a la fase del campo armónico que se genera,  $k2\omega$ .

El uso de un material birrefringente como KDP hizo posible el empatamiento de fases. En ciertas orientaciones, la fase del campo armónico se empaata exactamente con la del campo fundamental. Es decir, en una particular dirección de propagación del haz, el índice de refracción de la onda ordinaria evaluado en la frecuencia fundamental es igual al índice de refracción de la onda extraordinaria evaluado en el doble de la frecuencia fundamental. Tal empatamiento de fase incrementó la GSA en un factor de 300. Colocando la muestra en una cavidad y enfocando el haz en la misma, ellos reportaron además que la intensidad del haz armónico se vería incrementada en un factor de  $10^4$ . De esta forma la GSA empezó a ser un efecto no lineal con un gran potencial de aplicación práctica.

Otro aspecto importante a tomar en cuenta en la GSA es que ésta solo se puede generar en medios que no tienen simetría de inversión, llamados medios no centrosimétricos. En estos sistemas, el intercambio del vector de posición  $\mathbf{r}$  por  $-\mathbf{r}$  deja invariante al sistema. Materiales amorfos como el vidrio o sólidos cristalinos con simetría cúbica son medios que presentan simetría de inversión y, por lo tanto, en ellos la GSA no está permitida dentro de

la aproximación dipolar. En esta aproximación, la respuesta óptica del medio se debe a la radiación que proviene de dipolos en el medio y no de arreglos de cargas cuadrupolares, octupolares, etc. Esto mismo aplica en la generación de armónicos de orden par. En cambio, la generación de armónicos de orden impar si está permitida tanto en medios con y sin simetría de inversión.

## Rectificación óptica

La *rectificación óptica* es un efecto no lineal de segundo orden, el cual se lleva a cabo en medios no centrosimétricos. El efecto consiste en la generación de una polarización DC en el medio no lineal debido a la incidencia de un haz láser intenso. La observación de este efecto la realizó M. Bass y colaboradores [8], en 1962. Ellos usaron como medio no lineal a los cristales no lineales de KDP y "*potassium dideuterium phosphate*",  $KD_dP$ , a los cuales les incidieron pulsos de luz provenientes de un laser de rubí, con duración de décimas de milisegundos, intensidades del orden de MW y longitud de onda de 6943 Å.

En la generación de los procesos de segundo orden, la polarización total del medio contiene dos contribuciones: una que es constante en el tiempo (o DC) y la otra que oscila al doble de la frecuencia fundamental, correspondiente a la GSA. La contribución DC tiene su origen en la falta de centrosimetría del cristal. Es decir, la respuesta del medio al campo electromagnético es asimétrica, lo cual genera un desplazamiento del centro de gravedad de las cargas positivas y negativas. Esto, a su vez, genera una polarización DC en el medio. Experimentalmente se coloca el cristal no lineal entre un par de placas capacitivas y se detecta tanto la diferencia de potencial inducida entre las placas ante el paso del haz a través del cristal como la intensidad del campo en rectificación óptica.

## Suma de frecuencias

Si el campo incidente en el medio no lineal contiene dos contribuciones que oscilan a diferentes frecuencias,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , entonces se genera el proceso no lineal de *suma de frecuencias*. En este caso, la polarización no lineal de segundo orden oscila a la frecuencia  $\omega_3$ , que es la suma de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Notemos, entonces, que el efecto de GSA es el caso particular de suma de frecuencias cuando  $\omega_1 = \omega_2$ . La condición de empatamiento de fase para que se lleve a cabo el proceso de suma de frecuencias eficientemente es tal que el vector de onda del campo que oscila a  $\omega_3$  es igual a la suma de los vectores de onda de los campos que oscilan a  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

Desde el punto de vista cuántico (ver Figura 2), el proceso de generación de suma de frecuencias tiene lugar a través de la aniquilación de dos fotones con energías  $\hbar\omega_1$  y  $\hbar\omega_2$ , y la creación de un fotón de energía  $\hbar\omega_3$ , de tal forma que la energía del fotón generado sea igual a la suma de las energías de los dos fotones incidentes. Esto es, se conserva la energía en el proceso.

## Diferencia de frecuencias

El proceso no lineal de *diferencia de frecuencias* se genera cuando se tienen dos campos electromagnéticos incidentes en el medio no lineal y que oscilan a las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , con  $\omega_1 > \omega_2$ . En este caso, la polarización no lineal de segundo orden del medio oscilará a la frecuencia  $\omega_3$ , que será igual a la diferencia de las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Esto es:  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ . El proceso mecánico cuántico es tal que la energía del fotón a  $\omega_1$  se divide en las energías correspondientes de los fotones a  $\omega_2$  y  $\omega_3$ . Por cada fotón que se crea a  $\omega_2$  se crea un fotón a  $\omega_3$ . De esta forma durante la propagación de los campos a través del medio no lineal, la intensidad de los campos oscilando a  $\omega_2$  y  $\omega_3$  se amplifican exponencialmente: la generación del campo oscilando a  $\omega_2$  refuerza la generación del campo oscilando a  $\omega_3$  y viceversa. A este proceso se le llama *amplificación paramétrica*.

En el caso en que solo se tiene el campo oscilando a  $\omega_1$ , como campo incidente, la generación de diferencia de frecuencias aún es posible. Siempre existe un ruido de fondo que sirve como semilla para generar el campo que oscila a la frecuencia más baja,  $\omega_2$ . La condición que se requiere para que el proceso sea eficiente es que se cumpla la condición de empatamiento de fase, la cual, en este caso, dice que el vector de onda del campo generado a  $\omega_3$  sea igual a la diferencia de los vectores de onda de los campos que oscilan a  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , respectivamente.

Si al sistema no lineal lo colocamos dentro de una cavidad o resonador con espejos altamente reflejantes a campos que oscilan a las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  entonces los campos generados a través del proceso de amplificación paramétrica comenzaran a oscilar. Este arreglo o dispositivo recibe el nombre de oscilador óptico paramétrico. Entre sus aplicaciones se tiene que éste puede usarse como fuente de luz sintonizable en las regiones espectrales del infrarrojo, visible y ultravioleta.

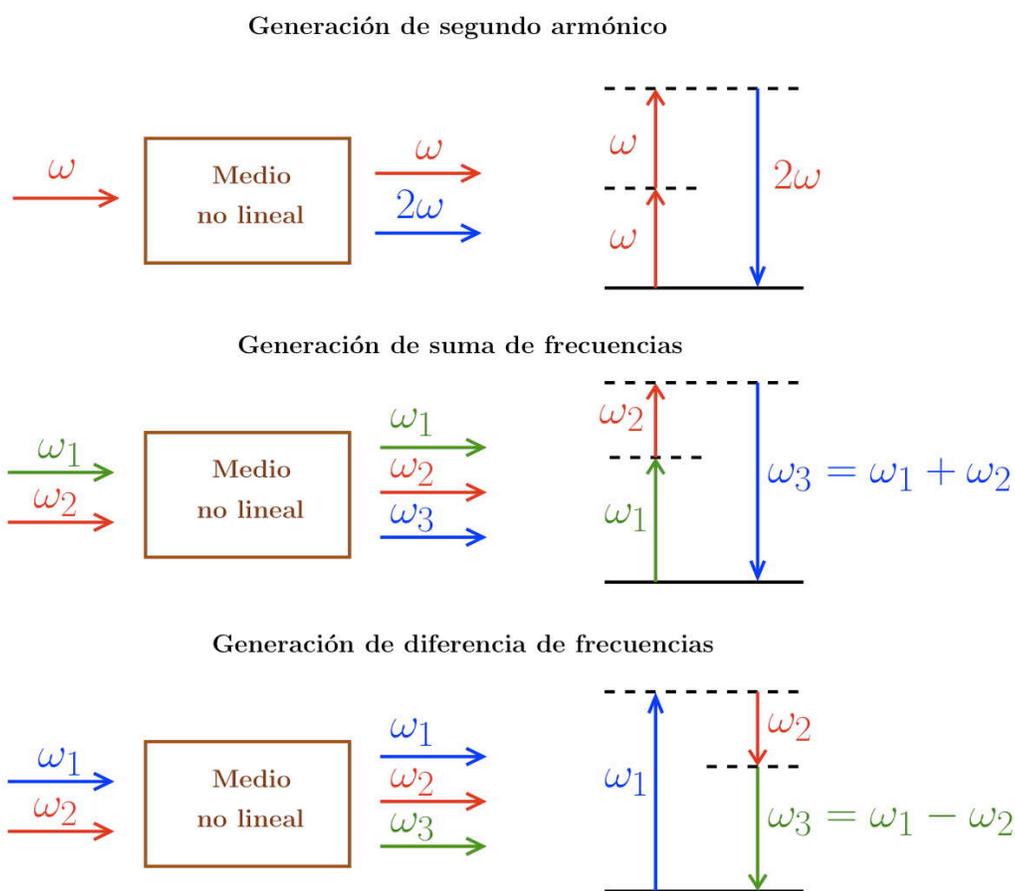


Figura 2: Esquemas de la generación de los procesos de segundo orden y sus correspondientes diagramas de energía, donde los estados indicados con líneas continuas indican estados reales; mientras que los estados indicados con líneas discontinuas se refieren a estados virtuales.

### Procesos no lineales de tercer orden

Los procesos no lineales de tercer orden se generan cuando el campo eléctrico incidente en el medio no lineal se

compone, en general, de tres términos que oscilan a las frecuencias  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$ . Y la polarización de tercer orden del medio es proporcional al cubo del campo incidente. De esta forma, los procesos de tercer orden acoplan cuatro campos por lo que, a estos procesos, se les llama *procesos de cuatro ondas*. Diferentes procesos no lineales de tercer orden pueden llevarse a cabo, los cuales, a diferencia de los procesos no lineales de segundo orden, pueden generarse en sistemas con simetría de inversión. A continuación se describen algunos de estos procesos.

Si se incide en el medio un campo que oscila a la frecuencia  $\omega_1$  en un medio dentro de un campo eléctrico DC entonces la polarización de tercer orden del medio contiene dos componentes que oscilan a la frecuencia del campo incidente: una de ellas que depende de la intensidad del campo DC y la otra que depende de la intensidad del campo óptico. En ambos casos, el índice de refracción del medio sufre cambios que dependen de la intensidad del campo aplicado tanto del campo DC como del campo óptico AC. A estos procesos se les llama *efecto Kerr* DC o AC, dependiendo si el cambio se debe a la intensidad del campo DC o AC, correspondientemente. La variación del índice de refracción es directamente proporcional tanto a la susceptibilidad de tercer orden como a la intensidad del campo aplicado. El efecto Kerr es responsable de los efectos de *autoenfocamiento*, *automodulación de fase* y *autodistorsión*.

Un caso más general del efecto en el que el índice de refracción es dependiente de la intensidad del haz se observa cuando se tienen haces de luz incidentes en el medio no lineal y que oscilan a las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . En tal caso, la polarización del medio contendrá dos contribuciones que oscilan a las mismas frecuencias. La primera contribución, la que oscila a  $\omega_1$ , genera un cambio en el índice de refracción que depende de la intensidad del campo que oscila a  $\omega_2$ . Y la segunda contribución, que oscila a  $\omega_2$ , genera un cambio en el índice de refracción que depende de la intensidad del campo que oscila a  $\omega_1$ . En otras palabras, un haz modifica el índice de refracción que siente el otro haz, y viceversa. A este efecto se le llama *modulación de fase cruzada*.

Otro efecto de tercer orden es el de GSA inducido por un campo eléctrico DC. Como se ha dicho anteriormente, la GSA no es posible en medios con simetría de inversión. Sin embargo, si al medio se le aplica un campo eléctrico DC entonces la simetría vista por el campo óptico se ve modificada por la presencia del campo DC permitiendo de esta forma la GSA.

El proceso de *generación de tercer armónico* (GTA) es un efecto no lineal de tercer orden, en el que el medio no lineal responde a la incidencia de un campo óptico que oscila a la frecuencia  $\omega_1$  y genera un campo que oscila al triple de la frecuencia del campo incidente. El proceso mecánico cuántico del fenómeno de GTA corresponde a la aniquilación de tres fotones con energía  $\hbar\omega_1$ , y a la creación de un fotón con energía igual al triple de la energía de los fotones incidentes. Maker, Terhune and Savage [9,10] realizaron las primeras observaciones de la (GTA) en cristales, vidrios y líquidos. En una de sus observaciones, ellos observaron tercer armónico a la longitud de onda de 2313 Å cuando incidieron pulsos de luz de un láser de rubí de 1 MW de potencia en un cristal de calcita. La eficiencia máxima de GTA que obtuvieron fue de  $3 \times 10^{-6}$ .

### Generación de armónicos de alto orden

Cuando los campos ópticos son lo suficientemente intensos, de tal forma que es posible la ionización de los átomos, es posible generar armónicos de muy alto orden, los cuales pueden extenderse en el espectro hasta la región de rayos X. En este caso, el tratamiento perturbativo de la polarización en diferentes órdenes de la susceptibilidad ya no es válido. El mecanismo básico de *generación de armónicos de alto orden* puede explicarse con el modelo semiclásico de tres pasos: en el primer paso, los electrones ligados a los átomos o moléculas se ionizan ante la presencia de un campo óptico intenso; enseguida, los electrones se aceleran fuera de los iones a los que se encontraban ligados; finalmente, cuando el campo eléctrico cambia de signo, los electrones son desacelerados y regresados a los núcleos iónicos donde se encontraban. En la recombinación de los electrones con sus correspondientes núcleos, se emite un fotón con energía correspondiente a la generación de un armónico de alto orden [12]. Burnett y colaboradores [11], en 1977, realizaron los primeros estudios de generación de

armónicos de alto orden. Ellos reportaron la observación de luz esparcida con diferentes líneas espectrales que correspondían a armónicos enteros desde el tercero hasta el undécimo. El haz esparcido provenía de un plasma que se generaba cuando pulsos de luz de anchos temporales de nanosegundos, longitud de onda fundamental de  $10.59 \mu\text{m}$  y energía de 20-50 J se incidieron en muestras de Aluminio. La energía relativa del undécimo armónico con respecto a la correspondiente del campo fundamental fue del orden de  $10^{-9}$ . Desde entonces, se ha tenido un gran progreso en el campo de generación de armónicos de alto orden: su generación se ha optimizado cuantitativamente como función de las características del campo incidente. Por lo que, ahora, es posible generar armónicos muy intensos. Como aplicación, se encuentra que la generación de armónicos provee una fuente de radiación coherente con duración ultracorta (de femtosegundos y attosegundos) en el rango de longitudes de onda del ultravioleta extremo y de rayos X [12,13].

## Investigación en óptica no lineal en el CIO

En el Centro de investigaciones en Óptica, CIO, se realiza investigación en el campo de la óptica no lineal. Como ejemplo: generación de segundo armónico para el análisis de superficies y nanoestructuras [14,15], efectos no lineales en fibras de cristal fotónico [16,17], caracterización de propiedades ópticas no lineales de diversos materiales, aplicaciones de la microscopía multifotónica para el análisis de sistemas biológicos [18], en el desarrollo de compuestos orgánicos para aplicaciones en dispositivos optoelectrónicos y fotónicos [19], entre otros. A continuación describo dos de estos estudios.

El primero de ellos se relaciona con la aplicación de GSA como técnica espectroscópica para el análisis de superficies de materiales que son centrosimétricos en el bulto. Siendo que para medios centrosimétricos la GSA no está permitida, entonces alguna señal de GSA que provenga del material tendrá que originarse necesariamente en la superficie. Esto se debe a que la superficie no es centrosimétrica. En otras palabras, la simetría de inversión se pierde en la superficie. En el CIO hemos realizado estudios teóricos para explicar la respuesta óptica de GSA de algunas superficies tanto limpias como adsorbidas con átomos extraños, como por ejemplo silicio con adsorción de hidrógeno. Hemos aplicado tanto modelos fenomenológicos, semiempíricos y de primeros principios para calcular la respuesta óptica no lineal. Dentro de los primeros, por ejemplo, se encuentra el modelo de enlaces polarizables [14,15], el cual consiste en considerar a cada enlace entre átomos como una entidad polarizable o dipolo que responde a la presencia de un campo electromagnético. La técnica de GSA es muy sensible a cambios en la superficie: reconstrucción de las posiciones atómicas, adsorción de átomos extraños o transferencia de carga. Es por ello que su aplicación tecnológica tiene un papel importante dentro del campo actual de desarrollo de la nanotecnología, donde existe un interés por parte de la industria electrónica y optoelectrónica de generar dispositivos a escalas nanométricas.

Un segundo trabajo dentro de la óptica no lineal que hemos desarrollado en el CIO es el estudio teórico de la evolución de pulsos de luz llamados solitones en fibras de cristal fotónico. La característica principal de un pulso de solitón es que éste permanece sin distorsión durante su propagación, en cuyo caso se habla de un solitón fundamental. Si la envolvente del pulso de solitón evoluciona de tal forma que la forma del mismo se recupera periódicamente entonces se habla de un solitón de mayor orden. En dicho estudio, se ha analizado la compresión y calidad del pulso [16], así como el autodesplazamiento de frecuencia del solitón [17] como función de la tamaño de la sección transversal de la fibra de cristal fotónico. La generación de solitones en fibras ópticas tiene su origen en la interacción de los procesos no lineales de automodulación de fase y de dispersión. En el proceso de automodulación de fase, el índice de refracción del material depende de la intensidad del campo, lo cual conlleva un cambio de fase no lineal autoinducido que, a su vez, resulta en un cambio de fase en el tiempo ("*chirp*") y en un ensanchamiento espectral. Durante la propagación de un pulso de solitón de orden dos en fibras de cristal fotónico de núcleo hueco (ver Figura 3), el pulso experimenta una etapa inicial de compresión (o ensanchamiento del espectro) y, después de cierta distancia, éste alcanza su máxima compresión (o máximo ancho de banda), que corresponde al inicio de la fisión de solitón. El pulso resultante experimenta etapas de compresión y ensanchamiento junto con un desplazamiento continuo hacia longitudes de onda mayores debido a la ganancia Raman. Se forma enseguida un solitón fundamental, cuya longitud de onda central continua desplazándose hacia mayores longitudes de onda. Con la manufactura y desarrollo tecnológico de las fibras de cristal fotónico ha sido

posible promover apreciablemente los efectos no lineales, debido al alto confinamiento de campo que se puede lograr en ellas, en comparación con el que se puede lograr en una fibra convencional. Actualmente, se tiene un gran interés científico y tecnológico en este tipo de fibras debido al potencial de aplicación que tienen en diversas áreas.

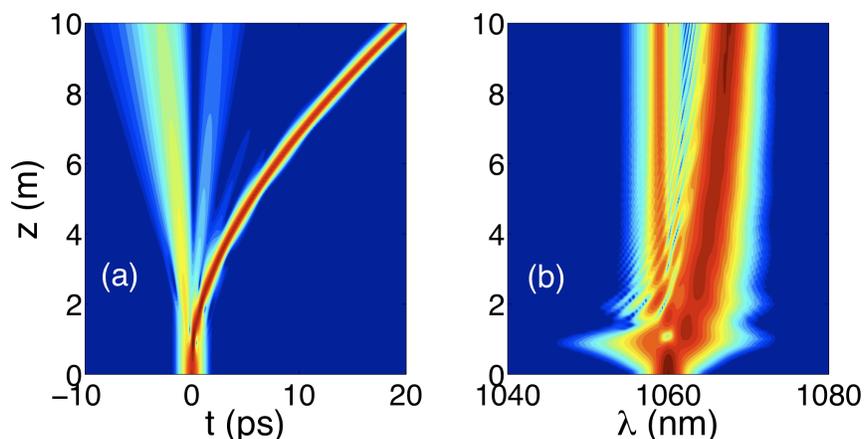


Figura 3: Patrones de densidad de la intensidad de campo de la evolución temporal (a) y espectral (b) de un pulso de solitón de orden dos que se propaga en una fibra de cristal fotónico de núcleo hueco.

## Conclusiones

La óptica no lineal continúa siendo un área actual de estudio, debido a que los procesos no lineales en los diversos materiales son esenciales para una gran gama de aplicaciones en diferentes campos. Considerando, además, el reciente desarrollo de nuevos materiales, como lo son el grafeno, cristales fotónicos, nanoestructuras, metamateriales, estructuras orgánicas, etc., la comunidad científica continúa ahora interesándose en el estudio de efectos no lineales en estos materiales, así como en aplicar y/o desarrollar técnicas ópticas no lineales para su análisis. Por lo que incursionar en la óptica no lineal continúa siendo una área de oportunidad dentro de la investigación, desarrollo tecnológico e ingeniería.

## Referencias

- [1] J.A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing and P.S. Pershan, *Interactions between light waves in a nonlinear dielectric*, Phys. Rev., **127**, 1918 (1962).
- [2] N. Bloembergen, *Nonlinear optics and spectroscopy*, Reviews of Modern Physics, **54**, 685, (1982).
- [3] Geoffrey New, *Introduction to nonlinear optics*, Cambridge University Press, (2011).
- [4] Robert Boyd, *Nonlinear Optics*, 3a edición, Academic Press, (2008).
- [5] J. Kerr, Phil. Mag. (4th series), **50**, 337 (1875).
- [6] P.A. Franken, A.E. Hill, C.W. Peters and G. Weinreich, *Generation of Optical Harmonics*, Phys. Rev. Lett., **7**, 118 (1961).

- [7] P.M. Maker, R.W. Terhune, M. Nisenoff, and C.M. Savage, *Effects of dispersion and focusing on the production of optical harmonics*, Phys. Rev. Lett., **8**, 21, (1962).
- [8] M. Bass, P. A. Franken, J. F. Ward, and G. Weinreich, *Optical rectification*, Phys. Rev. Lett., **9**, 446 (1962).
- [9] P.D. Maker, R.W. Terhune, and C.M. Savage, in *Proceedings of the Third International Conference on Quantum Electronics*, edited by P. Grivet and N. Bloembergen (Columbia University Press, New York, 1964), p. 1559.
- [10] P.D. Maker and R.W. Terhune, *Study of Optical Effects Due to an Induced Polarization Third Order in the Electric Field Strength*, Phys. Rev., **137**, A801 (1965).
- [11] N.H. Burnett, H.A. Baldis, M.C. Richardson, and G.D. Enright, *Harmonic generation in CO<sub>2</sub> laser target interaction*, Applied Physics Letters, **31**, 172 (1977).
- [12] C. Winterfeldt, C. Spielmann, and G. Gerber, *Colloquium: Optimal control of high harmonic generation*, Reviews of Modern Physics, **80**, 117 (2008).
- [13] U. Teubner and P. Gibbon, *High-order harmonics from laser-irradiated plasma surfaces*, Reviews of Modern Physics, **81**, 445 (2009).
- [14] N. Arzate and B.S. Mendoza, *Polarizable bond model for optical spectra of Si(100) reconstructed surfaces*, Phys. Rev. B, **63**, 113303 (2001).
- [15] B.S. Mendoza, R.A. Vázquez-Nava, N. Arzate, J.E. Mejía and W.L. Mochán, *Polarizable dipole models for linear and non-linear optical surface spectroscopy*, Recent Research in Photonics, Research Signpost. Editors: Rafael Espinosa-Luna, Eusebio Bernabeu and Vicente Aboites, 1-98, (2009).
- [16] N. González-Baquedano, N. Arzate, I. Torres-Gómez, D. E. Ceballos-Herrera, A. Ferrando, and C. Milián, *Femtosecond pulse compression in a hollow-core photonic bandgap fiber by tuning its cross section*, Photonics and Nanostructures: Fundamentals and Applications, **10**, 594 (2012).
- [17] N. González-Baquedano, I. Torres-Gómez, N. Arzate, A. Ferrando, and D.E. Ceballos-Herrera, *Pulse quality analysis on soliton pulse compression and soliton self-frequency shift in a hollow-core photonic bandgap fiber*, Optics Express, **21**, 9132 (2013).
- [18] R. Carriles, D.N. Schafer, K.E. Sheetz, J.J. Field, R. Cisek, V. Barzda, A.W. Sylvester, and J.A. Squier, *Imaging techniques for harmonic and multiphoton absorption fluorescence microscopy*, Review of Scientific Instruments, **80**, 081101 (2009).
- [19] J.L. Maldonado, G. Ramos-Ortiz, M. Rodríguez, M.A. Meneses-Nava, O. Barbosa-García, R. Santillán and N. Farfán, *Organic non-linear optics and opto-electronics*, AIP Proceedings, **1319**, 117 (2010).